

# Física: Mecânica

## TÓPICO 8: Gravitação

Nesta aula estudaremos as leis que descrevem o movimento de corpos celestes que foram propostas por Johannes Kepler (1571-1630) e Isaac Newton (1643-1727). Com elas, é possível descrever trajetória de planetas, calcular distâncias, períodos e forças de interação entre corpos celestes.

### 1 Leis de Kepler

#### 1.1 Primeira lei

A primeira lei de Kepler estabelece que **todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos**. Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos  $F$ , é constante, conforme descrito na figura 1 (Tipler e Mosca, 2014). A figura 2 mostra um planeta seguindo uma trajetória elíptica com o Sol em um dos focos. A órbita mais próxima do Sol é chamada de *periélio*, denotado por  $r_p$  (ponto P), e a mais afastada é chamada de *afélio*, denotada por  $r_a$  (ponto A). A distância média entre o planeta e o Sol, definida como  $(r_a + r_p)/2$ , é igual ao semi-eixo maior  $a$ . Os planetas conhecidos descrevem órbitas mais circulares do que a órbita apresentada nesta figura. Um bom exemplo é a Terra, com a distância do Sol no periélio igual a  $1,48 \times 10^{11}$  m e no afélio igual a  $1,52 \times 10^{11}$  m. A distância média (e por consequência o semi-eixo maior) é, portanto,  $1,50 \times 10^{11}$  m (Tipler e Mosca, 2014). Este valor equivale uma unidade astronômica (UA):

$$1 \text{ UA} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$$

sendo uma unidade comum para tratar problemas astronômicos.

#### 1.2 Segunda lei

A segunda lei de Kepler estabelece que os planetas varrem áreas iguais em tempos iguais. O segmento  $r$

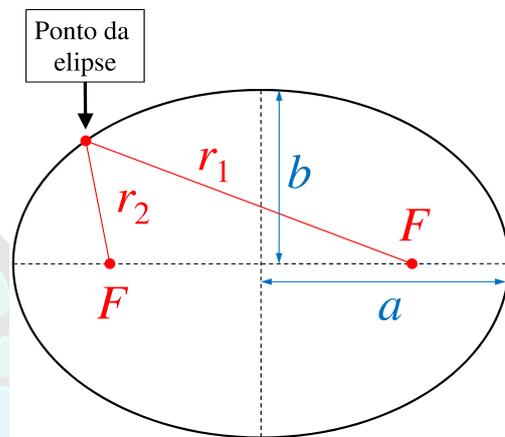


Figura 1: Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais  $r_1 + r_2 = \text{constante}$ . A distância  $a$  é chamado de semi-eixo maior, e  $b$  é o semi-eixo menor (Figura adaptada de Tipler e Mosca, 2014).

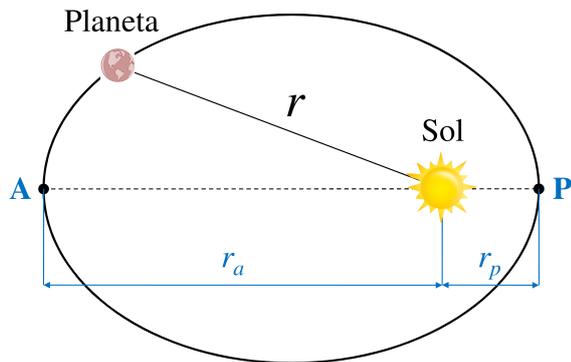
da figura 2 varre uma área  $A$  no mesmo intervalo  $\Delta t$  em regiões mais próximas ou afastadas do Sol, conforme mostra a figura 3. Isso significa que o planeta se movimenta mais devagar quando está mais longe do Sol e mais depressa quando está mais próximo.

#### 1.3 Terceira lei

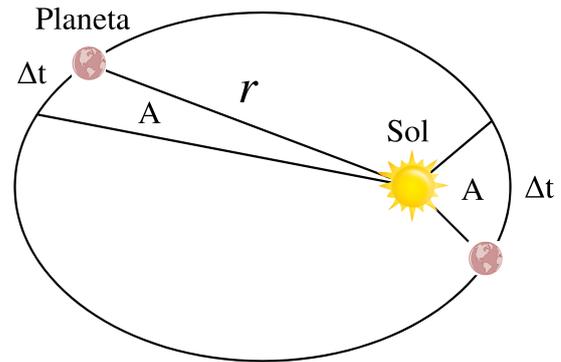
A terceira lei estabelece a lei dos períodos para qualquer planeta em torno do Sol: **O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita:**

$$T^2 = Cr^3 \quad (1)$$

em que  $T$  é o período do planeta,  $r$  é o raio médio da trajetória elíptica (ou o semi-eixo maior  $a$ ) e  $C$  é uma constante de proporcionalidade igual para todos os planetas.



**Figura 2:** A trajetória elíptica de um planeta com o Sol em um dos focos (Figura adaptada de Tipler e Mosca, 2014) com recursos das páginas digitais VectorStock 2019 e PNGtree 2020.



**Figura 3:** Quando um planeta está próximo do Sol, ele se move mais rapidamente do que quando está mais afastado. As áreas (representadas por A) varridas pela linha que liga os centros do Sol e do planeta, durante um dado intervalo de tempo  $\Delta t$ , são iguais (Figura adaptada de Tipler e Mosca, 2014) com recursos das páginas digitais VectorStock 2019 e PNGtree 2020.

## 2 Lei da gravitação universal

A partir de vários dados, incluindo os obtidos por Tycho Brahe e Kepler, Newton postulou que a força de atração  $F$  entre dois corpos de massas  $M$  e  $m$  é diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separam:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2)$$

em que  $r$  é distância média de separação em relação ao centro de massa dos corpos e  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$  é a constante da gravitação universal. A força  $\vec{F}$  que atua sobre  $M$  (devido  $m$ ) na figura 4 tem a mesma intensidade da força  $\vec{F}$  que atua sobre  $m$  (devido  $M$ ). Elas formam um par ação e reação. A figura 4 é similar à figura 7 da Aula 4, com a Terra representando o corpo de massa  $M$  e a Lua o corpo de massa  $m$ . A força  $F_g$  sobre a Lua é a mesma força  $F$  aqui representada; desta forma, a força gravitacional descrita pela equação 2 representa a força centrípeta sobre a Lua:

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (3)$$

em que  $v$  é a velocidade da Lua, tangente à linha da sua trajetória, e  $r$  a distância média entre os corpos.

### Problema 1

(UFSC) Durante aproximados 20 anos, o astrônomo dinamarquês Tycho Brahe realizou rigorosas observações dos movimentos planetários, reunindo dados que serviram de base para o trabalho desenvolvido, após a sua morte, por seu discípulo, o astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630). Kepler, possuidor de grande habilidade matemática, analisou cuidadosamente os dados coletados por Tycho Brahe, ao longo de vários anos,

tendo descoberto três leis para o movimento dos planetas. Apresentamos, a seguir, o enunciado das três leis de Kepler.

**1ª lei de Kepler:** Cada planeta descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, da qual o Sol ocupa um dos focos.

**2ª lei de Kepler:** O raio- vetor (segmento de reta imaginário que liga o Sol ao planeta) varre áreas iguais, em intervalos de tempos iguais.

**3ª lei de Kepler:** Os quadrados dos períodos de translação dos planetas em torno do Sol são proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas.

Assinale a(s) proposição(ões) que apresenta(m) conclusão(ões) **correta(s)** das leis de Kepler:

01. A velocidade média da translação de um planeta em torno do Sol é diretamente proporcional ao raio médio de sua órbita.
02. O período de translação dos planetas em torno do Sol não depende da massa dos mesmos.
04. Quanto maior o raio médio da órbita de um planeta em torno do Sol, maior será o período do seu movimento.
08. A 2ª lei de Kepler assegura que o módulo da velocidade de translação de um planeta em torno do Sol é constante.

16. A velocidade de translação da Terra em sua órbita aumenta à medida que ela se aproxima do Sol e diminui à medida que ela se afasta.

32. Os planetas situados à mesma distância do Sol devem ter a mesma massa.

64. A razão entre os quadrados dos períodos de translação dos planetas em torno do Sol e os cubos dos raios médios de suas órbitas apresenta um valor constante.

**RESOLUÇÃO:**

01. Incorreta. A velocidade média de translação pode ser calculada por meio da equação 3:

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

o que mostra que a velocidade é inversamente proporcional ao raio médio  $r$ :

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (4)$$

02. Correta. O período de translação pode ser calculado a partir da equação (2) da Aula 2:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (5)$$

Sustituindo a equação 4 na equação 5, obtemos:

$$T = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{GM}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da equação 6, obtemos a expressão final para o período:

$$T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3 \quad (6)$$

Comparando a equação 6 com a equação 1, concluímos que a terceira lei de Kepler foi demonstrada a partir da lei da gravitação universal de Newton, em que a constante  $C$  vale  $4\pi^2/GM$ . Portanto, pela terceira lei de Kepler, concluímos que o período dos planetas não dependem das suas massas, dependem apenas da massa do Sol.

04. Correta. Este resultado é obtido diretamente da terceira lei de Kepler: se o raio médio aumenta, o período também aumenta.

08. Incorreta. A segunda lei de Kepler assegura que quanto mais próximo do Sol,

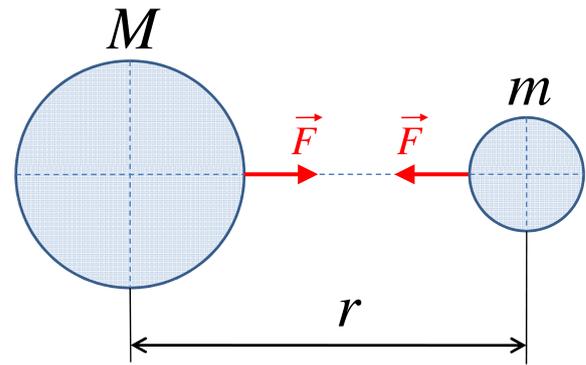


Figura 4: Dois corpos de massas  $M$  e  $m$ , separados por uma distância  $r$ , são atraídos mutuamente por meio de uma força gravitacional  $\vec{F}$ .

maior é a velocidade de translação e quanto mais longe, menor é a velocidade de translação.

16. Correta. Veja a explicação do item 08.

32. Incorreta. A terceira lei de Kepler assegura que devem ter apenas o mesmo período.

64. Correta. Considere dois planetas A e B que possuem períodos  $T_A$  e  $T_B$ , respectivamente, e distâncias médias  $r_A$  e  $r_B$ , respectivamente, em translação em torno do Sol. Pela terceira lei de Kepler, concluímos que:

$$\frac{T_A^2}{r_A^3} = \frac{T_B^2}{r_B^3} = C$$

Portanto, a soma dos itens corretos é 86.

**Problema 2**

(UNIFEI) Um estudioso de história, consultando os trabalhos de Galileu, anotou os seguintes dados a respeito de uma das Luas de Júpiter, a Io:  $T = 1,77$  dias  $= 1,5 \times 10^5$  s e raio da órbita:  $R = 4,2 \times 10^5$  km. A partir desses dados e conhecendo a constante gravitacional  $G = 7 \times 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup> e o raio de Júpiter  $R_J = 7 \times 10^4$  km, determine:

- (a) a massa de Júpiter.
- (b) a intensidade da aceleração gravitacional próximo da superfície de Júpiter. Compare com o valor da Terra (10 m/s<sup>2</sup>).

**RESOLUÇÃO:** (a) A massa de Júpiter pode ser calculada com a terceira lei de Kepler apresentada pela equação 6:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{GT^2} R^3$$

em que  $M_J$  é a massa do planeta Júpiter,  $T$  o período da lua e  $R$  seu raio médio na órbita em torno de Júpiter:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{(7 \times 10^{-11})(1,5 \times 10^5)^2} (4,2 \times 10^8)^3$$

$$M = 1,9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

(b) A aceleração gravitacional é calculada pelo mesmo procedimento utilizado na resolução do Problema 5 da Aula 3. A aceleração gravitacional de um planeta de massa  $M$  e raio médio  $R$  é calculada com a equação 2. Considerando que sobre a superfície deste planeta existe um corpo de massa  $m$ , a força gravitacional do planeta sobre o corpo é  $GMm/R^2$ , onde o termo  $GM/R^2$  representa a aceleração gravitacional média  $g$  deste planeta. Assim, podemos escrever a força de atração gravitacional como  $mg$ , ou seja,  $F$  representa a própria força peso do corpo de massa  $m$ ! Considerando a massa e o raio médio do planeta Júpiter, a aceleração gravitacional é dada por:

$$g = \frac{GM_J}{R_J^2}$$

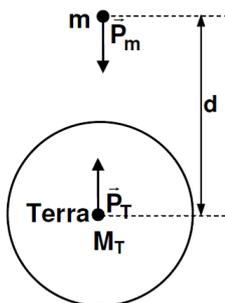
Substituindo os valores do enunciado nesta equação, obtemos:

$$g = \frac{(7 \times 10^{-11})(1,9 \times 10^{27})}{(7 \times 10^4)^2} \approx 27 \text{ m/s}^2$$

Comparando este valor com o da Terra, concluímos que a aceleração gravitacional de Júpiter é aproximadamente 2,7 vezes a aceleração gravitacional da Terra.

### Problema 3

(UFSC) Considere o sistema constituído por um ponto material de massa  $m$  e a Terra de massa  $M_T$ . Admita que  $d$  é a distância do centro da Terra a  $m$  e que  $\vec{P}_m$  e  $\vec{P}_T$  formam um par de forças, conforme a figura, devido à interação gravitacional entre as massas  $m$  e  $M_T$ .



Assim sendo, assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01.  $\vec{P}_m$  é uma força do ponto material de massa  $m$  sobre si próprio.

02.  $\vec{P}_m$  é uma força da Terra sobre o ponto material de massa  $m$ .

04. A intensidade de  $\vec{P}_m$  é maior que a intensidade de  $\vec{P}_T$ .

08. A intensidade de  $\vec{P}_m$  não depende da distância entre os dois corpos.

16. A intensidade de  $\vec{P}_m$  depende das massas  $M_T$  e  $m$ .

32. A intensidade de  $\vec{P}_m$  depende somente da massa  $m$ .

### RESOLUÇÃO:

01. Incorreta. De acordo com a lei da gravitação universal, a força  $\vec{P}_m$  é a força que o planeta de massa  $M_T$  exerce sobre o corpo de massa  $m$ .

02. Correta, conforme explicado no item 01.

04. Incorreta. De acordo com a lei da gravitação universal, a força que um corpo exerce sobre o outro tem mesmo módulo e é dado pela equação 2:

$$P_T = P_m = G \frac{M_T m}{d^2} \quad (7)$$

formando, portanto, um par ação e reação.

08. Incorreta. Conforme apresentado na equação 7,  $\vec{P}_m$  depende da distância entre os dois corpos ( $d$ ).

16. Correta, conforme apresentado na equação 7.

32. Incorreta. Veja item 16.

Portanto, a soma dos itens corretos é 18.

## COLABORADORES DESTA AULA

- **Texto:**  
Diego Alexandre Duarte
- **Diagramação:**  
Diego Alexandre Duarte
- **Revisão:**  
Maria Simone Kugeratski Souza  
Caroline Ruella Paiva Torres

## Referências Bibliográficas

- Chaban, E., M. A. Jerry e Ananias M. Neto (2005). *Resumo e Exercícios de Física*. Vol. Único. Florianópolis: JC Gráfica e Editora.
- Máximo, A. e B. Alvarenga (2012). *Caderno de revisão e exercícios de física*. Vol. Único. São Paulo: Scipione.
- PNGtree (2020). URL: [https://pngtree.com/freepng/cartoon-sun\\_950393.html](https://pngtree.com/freepng/cartoon-sun_950393.html) (acesso em 19/03/2020).
- Tipler, P. A. e G. Mosca (2014). *Física para cientistas e engenheiros - mecânica, oscilações e ondas, termodinâmica*. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC.
- VectorStock (2019). URL: <https://vectorstock.com/15650458> (acesso em 07/01/2019).

## 3 Lista de Problemas

Alguns dos exercícios apresentados na lista abaixo, bem como alguns resolvidos nesta aula, foram retirados de Chaban, Jerry e Neto, 2005 e Máximo e Alvarenga, 2012. Outros problemas foram retirados diretamente dos cardenos de prova dos referidos vestibulares.

1. (UFSC) O Ano Internacional da Astronomia comemora em 2009 os quatro séculos desde as primeiras observações telescópicas do céu feitas por Galileu Galilei. Esta é uma celebração global da Astronomia e de suas contribuições para o conhecimento humano. Na Astronomia, revela-se a importância das leis que regem a mecânica do sistema planetário e dos astros em geral.

Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

**01.** A 1ª Lei de Kepler diz que a órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol situado em um dos focos. Quando a Terra está mais próxima do Sol, é verão, e quando está mais afastada, é inverno. Nas posições intermediárias, quando a Terra está se afastando, é outono, e quando está se aproximando, é primavera.

**02.** Segundo a lei de Newton para a Gravitação Universal, dois corpos atraem-se com forças de

intensidade diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa; portanto, a Lua sofre a ação da força gravitacional da Terra.

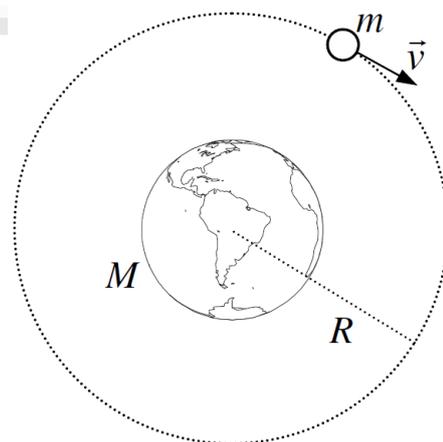
**04.** A órbita dos planetas que gravitam em torno de uma estrela é elíptica, ocupando a estrela um dos focos desta elipse. No sistema solar, como a excentricidade das órbitas dos planetas é muito pequena, as órbitas podem ser consideradas circulares, ocupando o Sol o centro da circunferência.

**08.** Dois satélites artificiais movem-se em órbitas circulares em torno da Terra. O raio da órbita do primeiro é 4 vezes maior do que o raio da órbita do segundo. A relação  $T_1/T_2$ , entre os períodos do primeiro e do segundo satélite, é 8.

**16.** O período de translação da Terra em torno do Sol depende da massa da Terra.

**32.** A velocidade de translação de qualquer planeta do sistema solar em sua órbita aumenta à medida que ele se aproxima do Sol e diminui à medida que ele se afasta dele.

2. (UFSC) Um satélite artificial, de massa  $m$ , descreve uma órbita circular de raio  $R$  em torno da Terra, com velocidade orbital  $\vec{v}$  de valor constante, conforme representado esquematicamente na figura (Desprezam-se interações da Terra e do satélite com outros corpos).



Considerando a Terra como referencial na situação descrita, assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**:

**01.** O satélite sofre a ação da força gravitacional exercida pela Terra, de módulo igual a  $F_G = GMm/R^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  é a massa da Terra.

**02.** Para um observador na Terra, o satélite não

possui aceleração.

04. A força centrípeta sobre o satélite é igual à força gravitacional que a Terra exerce sobre ele.

08. A aceleração resultante sobre o satélite tem a mesma direção e sentido da força gravitacional que atua sobre ele.

16. A aceleração resultante sobre o satélite independe da sua massa e é igual a  $GM/R^2$ , onde  $G$  é a constante de gravitação universal e  $M$  é a massa da Terra.

32. A força exercida pelo satélite sobre a Terra tem intensidade menor do que aquela que a Terra exerce sobre o satélite; tanto assim que é o satélite que orbita em torno da Terra e não o contrário.

3. (UFSC) Sobre as leis de Kepler, assinale a(s) proposição(ões) **VERDADEIRA(S)** para o sistema solar:

01. O valor da velocidade de revolução da Terra, em torno do Sol, quando sua trajetória está mais próxima do Sol, é maior do que quando está mais afastada do mesmo.

02. Os planetas mais afastados do Sol têm um período de revolução, em torno do mesmo, maior que os mais próximos.

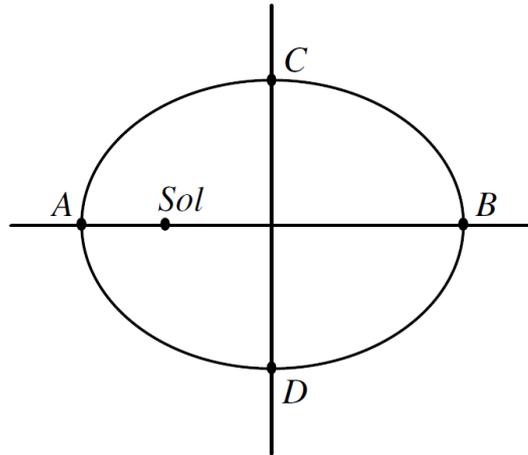
04. Os planetas de maior massa levam mais tempo para dar uma volta em torno do Sol, devido à sua inércia.

08. O Sol está situado num dos focos da órbita elíptica de um dado planeta.

16. Quanto maior for o período de rotação de um dado planeta, maior será o seu período de revolução em torno do Sol.

32. No caso especial da Terra, a órbita é exatamente uma circunferência.

4. (UFSC) A figura abaixo representa a trajetória de um planeta em torno do Sol. Esta trajetória é elíptica e os segmentos de reta entre os pontos A e B e entre C e D são, respectivamente, o eixo maior e o eixo menor da elipse. Esta figura está fora de escala, pois a excentricidade das órbitas planetárias é pequena e as suas trajetórias aproximam-se de circunferências.



A tabela abaixo apresenta dados astronômicos aproximados de alguns planetas:

	DISTÂNCIA MÉDIA AO SOL	MASSA	RAIO MÉDIO
Terra	$d_{TS}$	$m_T$	$R_T$
Saturno	$10 d_{TS}$	$95 m_T$	$9 R_T$
Urano	$20 d_{TS}$	$14 m_T$	$4 R_T$
Netuno	$30 d_{TS}$	$17 m_T$	$4 R_T$

$d_{TS}$ : distância média da Terra ao Sol

$m_T$ : massa da Terra

$R_T$ : raio da Terra

Assinale a(s) proposição(ões) **CORRETA(S)**.

01. O módulo da velocidade de um planeta quando passa por A é maior do que quando passa por B.

02. O período de Urano é cerca de 2,8 vezes o período de Saturno.

04. O período de Netuno é de aproximadamente 52 anos.

08. O módulo da força média que o Sol exerce sobre Saturno é cerca de nove vezes maior que o módulo da força média que o Sol exerce sobre a Terra.

16. O módulo da força que Urano exerce sobre um corpo na sua superfície é aproximadamente quatro vezes maior que o módulo da força que a Terra exerce sobre este corpo na sua superfície.

## 4 Gabarito

1. Soma dos itens corretos: 46. Item 01: Incorreta. Item 02: Correta. Item 04: Correta. Item 08: Correta. Item 16: Incorreta. Item 32: Correta.

## TÓPICO 8: Gravitação

2. Soma dos itens corretos: 29. Item 01: Correta.  
Item 02: Incorreta. Item 04: Correta. Item 08: Correta. Item 16: Correta. Item 32: Incorreta.
3. Soma dos itens corretos: 11. Item 01: Correta.  
Item 02: Correta. Item 04: Incorreta. Item 08: Correta. Item 16: Incorreta. Item 32: Incorreta.
4. Soma dos itens corretos: 3. Item 01: Correta.  
Item 02: Correta. Item 04: Incorreta. Item 08: Incorreta. Item 16: Incorreta.

